Compito di Geometria e algebra lineare del 4 giugno 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Svolgi i punti seguenti:

(1) Siano $U, W \subset V$ due sottospazi di uno spazio vettoriale. Definisci il sottospazio $U + W$.
(2) Sia $V = \mathbb{R}^5$.
  (a) Esistono $U, W \subset V$ con $\dim U = \dim W = 3$ e $\dim U \cap W = 1$?
  (b) Esistono $U, W \subset V$ con $\dim U = \dim W = 3$ e $\dim U \cap W = 0$?
  In caso affermativo fornisci un esempio, in caso negativo dimostra che non esistono.

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sia B una qualsiasi matrice reale quadrata 3×3.

(1) Dimostra che se $AB = 0$ allora 0 è necessariamente un autovalore per B.
(2) Construisci una matrice B quadrata 3×3 che soddisfi entrambe queste proprietà:
  - $AB = 0$,
  - $B^2 = 0$ ma $B \neq 0$.

Esercizio 3. Considera i due piani in $\mathbb{R}^3$ seguenti:

$$\pi_1 = \{x + y = 1\}$$

$$\pi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t + 2u - 1 \\ t + 2u + 2 \\ 2u + 4 \end{pmatrix} \middle|\ t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Scrivi π_2 in forma cartesiana.
(2) Costruisci un'isometria $f(x) = Ax + b$ tale che:
  - $f(\pi_1) = \pi_2$ e $f(\pi_2) = \pi_1$;
  - f non abbia punti fissi;
  - $\det A = 1$
(3) Costruisci un'isometria $g(x) = Ax + b$ tale che:
  - $g(\pi_1) = \pi_2$ e $g(\pi_2) = \pi_1$;
  - g non abbia punti fissi;
  - $\det A = -1$

Esercizio 4. Considera il prodotto scalare g su $\mathbb{R}^4$ dato da $g(x, y) = {}^t x S y$ dove S è la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Determina la segnatura di S.
(2) Esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione due su cui la restrizione $g|_W$ sia definita positiva? In caso affermativo trova una base per W.
(3) Esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione tre su cui la restrizione $g|_W$ sia nulla (cioè tale che $g(v, w) = 0\ \forall v, w \in W$)? In caso affermativo trova una base per W.

1. Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Visto a lezione.

(2) (a) Esistono, ad esempio $U = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3), W = \mathrm{Span}(e_1, e_4, e_5)$.

(b) Non esistono. Per la formula di Grassmann, sappiamo che $\dim(U+W) \leqslant 5$ e quindi

$$\dim U \cap V = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 3 + 3 - \dim(U+W) \geqslant 3 + 3 - 5 = 1.$$

Esercizio 2.

(1) Notiamo che $\ker A = \{x - y + z = 0\}$ ha dimensione 2. Se $AB = 0$, allora l'immagine di B è contenuta in $\ker A$, quindi ha dimensione $\leqslant 2$. Qundi B ha rango $\leqslant 2$ e non è invertibile. Quindi $\dim\ker B \geqslant 3 - 2 = 1$ e allora 0 è autovalore per B.

(2) L'ipotesi $AB = 0$ equivale a chiedere che B sia del tipo

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

dove a, b, c, d, e, f sono arbitrari. Fra queste matrici è facile trovarne una non nulla per cui $B^2 = 0$, ad esempio

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un metodo alternativo consiste nel prendere una matrice nilpotente di indice due e cambiarla per similitudine in modo che la sua immagine sia contenuta in $\ker A$.

Esercizio 3. Il piano π_2 in forma cartesiana è $x - y + 3 = 0$. I due piani si intersecano nella retta $x = -1, y = 2$. Una isometria come richiesto con $\det A = 1$ è una qualsiasi rototraslazione con angolo $\frac{\pi}{2}$ e asse r, una con $\det A = -1$ è una qualsiasi glissoriflessione ottenuta riflettendo lungo il piano $y = 2$ e quindi traslando lungo r. Ad esempio:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Esercizio 4. Il polinomio caratteristico ha radici 1 e -1 entrambe con molteplicità due, quindi la segnatura è $(2, 2, 0)$. Quindi esiste un piano W su cui la restrizione è definita positiva: per trovarlo cerchiamo due vettori v_1, v_2 che siano ortogonali e con $g(v_1, v_1) > 0, g(v_2, v_2) > 0$. Ad esempio:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Non esiste un sottospazio W di dimensione tre su cui $g|_W$ sia nullo. Se esistesse, per Grassmann W intersecherebbe il piano definito positivo trovato nel punto precedente in almeno una retta. Quindi esiste un vettore $v \neq 0$ nell'intersezione fra i due che è simultaneamente positivo (cioè $g(v, v) > 0$) e nullo (cioè $g(v, v) = 0$), assurdo.